$1^η$ Παρατήρηση: Κάθε συνάρτηση $f \in C^1[\alpha,\beta]$ ικανοποιεί τη συνθήκη Lipschitz με $L = \max_{x \in I} |\varphi'(x)|$.

Πράγματι, από το ΘΜΤ έχουμε ότι $\forall x,y \in [\alpha,\beta]$
θα $\exists\, \xi \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε:

$$|\varphi(x)-\varphi(y)| = \varphi'(\xi)\cdot(x-y) \Rightarrow |\varphi(x)-\varphi(y)| = |\varphi'(\xi)|\cdot|x-y| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\varphi(x)-\varphi(y)| \leq \max_{\xi \in I}|\varphi'(\xi)|\cdot|x-y| \quad , \text{με } L = \max_{\xi \in I}|\varphi'(\xi)|$$

Εφόσον η φ' συνεχής στο $[\alpha,\beta]$.

Πχ

Έστω $\varphi: [-\alpha,\alpha] \to \mathbb{R}$, $\alpha > 0$ και $\varphi(x) = x^2$

Μπορούμε να εξετάσουμε αν έχει μέγιστο, κατά απόλυτη τιμή στο διάστημα $[-\alpha,\alpha]$:

$$\varphi'(x) = 2x \Rightarrow \max_{x \in [\alpha,\alpha]} |\varphi'(x)| = 2\cdot\alpha$$

Άρα στο συγκεκριμένο παράδειγμα καταλήγουμε στο ίδιο συμπέρασμα με την "άσκηση (3) συνθήκη Lipschitz" στις ασκήσεις Αριθμητικής Ανάλυσης στο Google-drive!

$2^η$ παρατήρηση: Εάν $\varphi \in C^1(\alpha,\beta)$ δεν ικανοποιεί κατανάγκη τη συνθήκη Lipschitz.

Πχ

Έστω $\varphi: (0,1) \to \mathbb{R}$ με $\varphi(x) = \sqrt{x}$

Άρα, η $\varphi'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, $\forall x \in (0,1)$

Τότε,
$$|\varphi(x)-\varphi(y)| = |\sqrt{x}-\sqrt{y}| = \frac{|x-y|}{|\sqrt{x}+\sqrt{y}|} = \frac{1}{|\sqrt{x}+\sqrt{y}|}\cdot|x-y| \leq$$

$$\leq \underbrace{\max_{x,y \in I}\left(\frac{1}{|\sqrt{x}|+|\sqrt{y}|}\right)}_{(L)}\cdot|x-y|. \quad (\text{πόσο όμως το } L = ;)$$

αλλά έχουμε το $\lim_{\substack{x \to 0^+ \\ y \to 0^+}} \left(\dfrac{1}{|\sqrt{x}|+|\sqrt{y}|}\right) = \infty$ Άρα δεν ικανοποιεί τη συνθήκη Lipschitz.

Παράδειγμα 1ο

Έστω η $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $\varphi(x) = x^2$ να εξεταστεί αν πληρεί τη συνθήκη του Lipschitz

ΛΥΣΗ

$$\left.\begin{aligned} \varphi(x) &= x^2, \ \forall x \in \mathbb{R} \\ \varphi'(x) &= 2x, \ \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned}\right| \ \max_{x \in \mathbb{R}} |\varphi'(x)| = \infty \Rightarrow \text{η } \varphi \text{ όχι Lipschitz}$$

Παράδειγμα 2ο

Έστω η $\varphi(x) = |x|$ να εξετάσετε αν πληρεί τη συνθήκη του Lipschitz.

ΛΥΣΗ

$$\varphi(x) = |x| \Rightarrow \varphi(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

$$\varphi'(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

{Αν τελικά το παίρνει το 0 θα το εξετάσουμε με τον ορισμό παραγώγου $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$}

Άλλα, $|\varphi'(x)| = 1 \Rightarrow \max_{x \in \mathbb{R}} |\varphi'(x)| = 1 \Rightarrow$ η φ είναι Lipschitz.